Lycée Pilote Tunis	Mr. Masmoudi. R.	3° maths et sc

Série d'exercices (Suites réelles)

Exercice 1 :

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n\,! \geqslant 2^{n-1}$.
2) On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{n!}$.
   a) Montrer que U est majorée par 3.
   b) Montrer que U est croissante. En déduire qu'elle converge.
3) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = U_n + \dfrac{1}{n(n!)}$.
   a) Montrer que V est décroissante.
   b) Montrer que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$ on a : $U_p \leqslant V_q$.
   c) En déduire que V converge.
   d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.

Exercice 2 :

Soit la suite U définie par : $U_0 = 2$ et pour tout entier n, $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{1}{U_n}\right)$.

1) Montrer que pour tout entier n, on a : $U_n \geqslant 1$.
2) Montrer que U est décroissante. En déduire que U converge.
3) Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1}$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_{n+1} = V_n^2$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < V_n < \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. En déduire la limite de V et celle de U.
4) Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{V_k}$. Calculer la limite de W.
5) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $V_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2^n}$. En déduire U_n en fonction de n.
6) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose: $T_n = V_0 V_1 \ldots V_n$. Exprimer T_n en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x+8}{2x+1}$. On pose $g = f \circ f$.

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

2) Calculer $g(x)$ pour $x \geqslant 0$. Prouver que g est croissante.

3) On définit la suite U par : $U_0 = 1$ et pour tout n, $U_{n+1} = f(U_n)$. On pose $V_p = U_{2p}$ et $W_p = U_{2p+1}$.
   a) Construire sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de U.
   b) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$: $V_p < 2 < W_p$.
   c) Etudier la monotonie de V et W. En déduire qu'elles convergent.

4) Soit la suite T définie sur $\mathbb{N}$ par : $T_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 2}$.
   a) Montrer que T est une suite géométrique.
   b) Exprimer U_n en fonction de n et calculer sa limite.